FICHE 35 Produit d'un vecteur par un nombre réel

▸ $(\vec{i}, \vec{j})$ désigne une base orthonormée, λ un nombre réel et $\vec{u}(x\,;y)$ un vecteur. $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\lambda x\,;\lambda y)$. De plus $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \times \|\vec{u}\|$.

▸ Pour tous nombres réels λ, λ' et tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$:
- $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- $(\lambda+\lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$
- $\lambda(\lambda'\vec{u}) = (\lambda\lambda')\vec{u}$
- $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
- $-\vec{u}$ est le vecteur opposé au vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v} - \vec{u} = \vec{v} + (-\vec{u})$.

▸ $\vec{u}(x\,;y)$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ équivaut à $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Deux calculs

- Calculer la médiane de la liste suivante :
  5 - 10 - 12 - 7 - 9 - 18 - 20

  ....

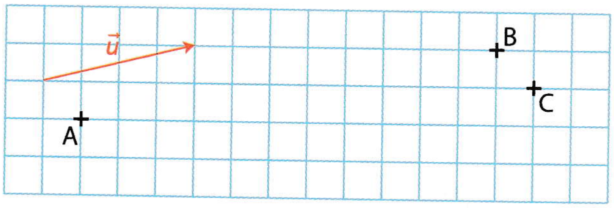
  ....

- Dans un repère, une courbe a pour équation $y = 1 + \frac{1}{x}$ (avec $x \neq 0$ et $y \neq 1$). Exprimer x en fonction de y.

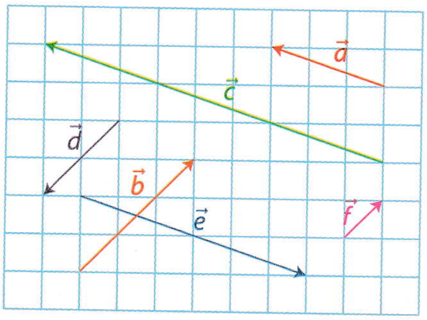
  ....

★

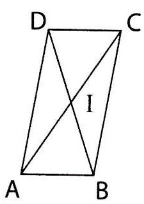
1 Représenter les vecteurs :
- $\vec{v}$ d'origine A tel que $\vec{v} = 2\vec{u}$
- $\vec{w}$ d'origine B tel que $\vec{w} = -\vec{u}$
- $\vec{z}$ d'origine C tel que $\vec{z} = -2{,}5\vec{u}$.



2 Compléter les pointillés avec un nombre réel.
- $\vec{c} = \ldots\vec{a}$
- $\vec{e} = \ldots\ldots\vec{a}$
- $\vec{a} = \ldots\ldots\vec{e}$
- $\vec{b} = \ldots\vec{f}$
- $\vec{f} = \ldots\ldots\vec{d}$
- $\vec{d} = \ldots\ldots\vec{f}$



3 ABCD est un parallélogramme de centre I. Relier les vecteurs qui sont égaux.



$\overrightarrow{DB}$ •	• $-\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB}$ •	• $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{IC}$ •	• $2\overrightarrow{IB}$
$\overrightarrow{ID}$ •	• $\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

4 Dans un repère orthonormé, on donne les points : A(1 ; −5), B(3 ; 2) et C(−4 ; 5).

a. Déterminer les coordonnées des vecteurs :
- $\overrightarrow{AB}$ ....
- $\overrightarrow{AC}$ ....

b. En déduire les coordonnées des vecteurs :
- $\vec{u} = -2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

  ....

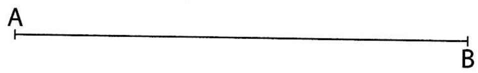
- $\vec{v} = 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

  ....

★★

5 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{w} = 4\vec{i} - 14\vec{j}$.
Démontrer que $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$.

6 [AB] est un segment de longueur 6 cm. Placer le point M de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.



....

....

....

7 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne le vecteur $\vec{u} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$.

a. Calculer la norme de $\vec{u}$.

....

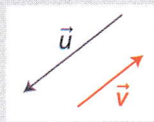
b. En déduire la norme de $\vec{v} = \vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}$.

....

....

FICHE 36 Colinéarité de vecteurs

- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u}$, autrement dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.
On convient que le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Dans une base orthonormée, $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont deux vecteurs.
Le **déterminant** du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ est le nombre $xy' - x'y$.
- $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = \mathbf{0}$.



Deux calculs

- Quelle est la nature du nombre $F = \dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$?

....

- Développer et réduire $B = (2x-3)^2 + 4x$.

....

★

1 Relier chaque vecteur à un vecteur qui lui est colinéaire.

$\vec{a}(-2;3)$ •	• $\vec{t}(-3;2)$
$\vec{b}(-2;-3)$ •	• $\vec{u}(10;15)$
$\vec{c}(3;-2)$ •	• $\vec{v}(-4;6)$
$\vec{d}(3;2)$ •	• $\vec{w}(15;10)$

2 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

3 Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne :
$\vec{u}\left(\dfrac{1}{3}\,;-1\right)$, $\vec{v}\left(2\,;-\dfrac{4}{3}\right)$, $\vec{w} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{z} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$.

a. Calculer le déterminant de chaque couple de vecteurs.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

....

- $\vec{u}$ et $\vec{w}$: ....

- $\vec{v}$ et $\vec{z}$: ....

- $\vec{w}$ et $\vec{z}$: ....

b. En déduire deux vecteurs colinéaires.

....

....

c. Donner les coordonnées d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$.

....

★★

4 A et B sont deux points donnés.
M et N sont des points tels que :
$$\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} = \vec{0} \text{ et } -\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} = \vec{0}.$$
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

5 Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{u}(a-1\,;\,4)$ et $\vec{v}(2\,;\,a+1)$ où a désigne un nombre réel.
Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

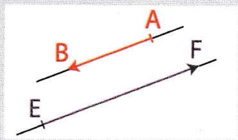
6 Dans chaque cas, démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

a. $4\overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

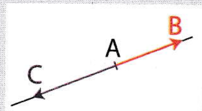
b. $\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

FICHE 37 Reconnaître le parallélisme ou l'alignement

▸ Deux droites (AB) et (EF) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.



▸ Trois points A, B, C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Deux calculs

- Sans calculatrice, déterminer $A = 1\,002^2 - 998^2$.

....

- Développer et réduire $A = 7 - (2 - 4x)^2$.

....

★

1 Dans un repère orthonormé, on donne les points :
$M(3;3)$, $N(8;5)$, $P(1;-2)$ et $Q(16;4)$.

a. Compléter avec les coordonnées.

- $\overrightarrow{MN}$ .... • $\overrightarrow{PQ}$ ....

b. En déduire que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

....

....

2 A, B, C, M et N sont cinq points distincts tels que :

$4\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ $\quad$ $5\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

a. Vérifier que $\overrightarrow{CN} = -\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

....

b. En déduire que les droites (AM) et (CN) sont parallèles.

....

....

3 A, B, E, F sont des points tels que $6\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = 5\overrightarrow{AF}$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{EF}$.

....

....

b. Que peut-on dire des droites (AB) et (EF) ?

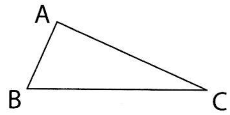
....

....

4 Dans un repère orthonormé, étudier l'alignement des points $R(-3;-2)$, $S(4;1)$, $T(6;2)$.

5 **a.** Placer sur la figure ci-dessous :

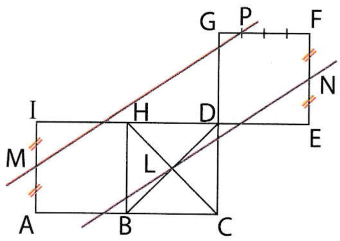
- l'image M du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$,
- le milieu N du segment [AM],
- le point P symétrique de C par rapport à N.



b. Démontrer que les points A, B, P sont alignés.

★★

6 ABHI, BCDH, DEFG sont des carrés de même côté avec D milieu de [CG].
L est le centre du carré BCDH, M et N sont les milieux des segments [AI] et [EF]. P est le point vérifiant $\overrightarrow{GP} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{GF}$.



Utiliser le repère orthonormé (B ; C, H) pour démontrer que les droites (MP) et (LN) sont parallèles.